Задачный подход. Обучение поиску решения задач.

Троицкая О.А.,
учитель математики

Из чего исходить при выборе нового направления?

- Сегодня мы живём в других социально-политических реалиях. Если раньше истина директивно задавалась с верху и была единственной, то сегодня одни и те же явления могут оцениваться с различных точек зрения – монополии на истину не существует.
- Происходит глобализация восприятия мира. Мы начинаем острее воспринимать сложность и взаимосвязанность идущих в природе и обществе процессов, в том числе и явлений самоорганизации.
- Резко изменилась и продолжает меняться информационная среда. Человеку, находящемуся в лавинах информационных потоков, необходимо научиться быстро, перерабатывать огромный объём зачастую противоречивой информации, адаптироваться в этих условиях.

Всё это показывает необходимость более решительно подходить к реформе математического образования, прекратить топтаться на месте, поскольку математическое образование наиболее способствует:

- изучению физики, химии, биологии, экономики, астрономии, информатики и др.;
- развитию порядочности и самостоятельности в здоровой социальной среде;
- успешному продолжению образования;
- воспитанию профессиональных качеств при овладении любой профессией;
- развитию эстетических чувств (красивый факт, красивая задача или решение, изящное доказательство.

Математика универсальна, всеобща, приобщает к мировой культуре именно потому не существует национальной, ведомственной или государственной математики.

Всё это заставляет задуматься о возможности осторожных и продуманных изменений как в содержании, так и в методических технологиях школьного математического образования. Одной из таких технологий является – система задач и задачный подход к обучению.

Самое главное найти у каждого ученика мотив к учению и самое трудное в работе учителя поиск необходимых инструментов прикосновения к личности. Как сформировать у учащихся интерес к предмету, научить самостоятельно и творчески добывать знания, активно участвовать в процессе обучения, уметь анализировать и оценивать свои знания – эти вопросы волновали меня как учителя. Помогла технология постановки целей (М.Е.Бершадский, В.В.Гузеев) – система задач и задачный подход к обучению.

Методы нахождения решений и психическая деятельность, связанная с поиском решения, во многом сходны как в жизненных или производственных задачах, так и в школьных (по математике, физике, химии). Поэтому ознакомление учащихся с методами поиска решений является средством не только улучшения учебных навыков, но и воспитания учащихся, подготовки их к будущей производственной деятельности, к жизни. От эффективности применения задач в обучении математике во многом зависит и степень подготовленности школьников к практической деятельности в любой сфере производства, народного хозяйства и культуры.

Решая математические задачи, представленные в продуманной системе, учащиеся не только активно овладевают содержанием курса математики, но и приобретают умения мыслить творчески. Это проявляется, например, в умении изменить условие задачи с целью применить тот или иной метод, приём в умении изобретать новые приёмы для решения задач; в умении выделять и накапливать потенциально полезную информацию; умение конструировать на базе данной задачи новые; в умении осуществлять самоконтроль, исследовать результат решения.

Поэтому можно утверждать, что педагогические основы использования задач в современном школьном обучении правомерно являются тем средством обучения, без применения которого невозможно активное и прочное усвоение учащимися программного материала, их всестороннее воспитание и развитие, приобщение к труду творческого характера.

В связи с этим уместно напомнить высказывание известного педагога- математика Д.Пойа: «*Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причём не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности. Поэтому первая и самая главная обязанность курса математики средней школы состоит в подчёркивании методической стороны процесса решения задач*». Этому способствует **задачный подход к обучению.**

Многие задачи, которые решаются на уроках математики и других предметов, можно условно подразделить на шаблонные и нешаблонные. Роль первых сводится к выработке навыков, необходимых для решения вторых. Например, учащимся предлагают разложить на множители выражение $x^3 + y^3$. Это шаблонное упражнение. Не умея его выполнить, учащийся X класса не сможет упростить выражение $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cos^2\alpha \sin^2\alpha$. Последнее упражнение можно считать нешаблонным. Вообще, указанная классификация условна и проводится на основе не математических, а дидактических соображений. Рассмотрим следующую задачу (которая может быть поставлена перед учащимися VII- IX классов): Найти натуральные числа x, y, z, если $xyz + xy + yz + + xz + x + y + z = 1975$. Решение этой задачи достигается разложением на множители числа 1976 и одновременно увеличением на 1 левой части равенства: $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 2^3 \cdot 13 \cdot 19$. Используя условие: x, y, z – натуральные числа, нетрудно найти возможные решения. Решение этой задачи не требует от учащихся знаний внепрограммного материала; вместе с тем задача направлена на глубокое понимание изученного, на формирование у школьников умения творчески применять известные знания.

По традиции в школьной практике в одних случаях осуществляется постепенный переход от метода шаблонных задач к методу нешаблонных, а в других такой постепенный переход не соблюдается. Когда не соблюдается постепенный переход от метода шаблонных задач к методу нешаблонных, нарушаются дидактические принципы последовательного преодоления трудностей, доступности, что приводит к плохим знаниям. Осуществляя постепенный переход от метода шаблонных задач к методу нешаблонных, ускоряя такой переход в случае работы с сильными классами, и, наоборот, переходя к простейшим, порой примитивнейшим упражнениям в слабых классах, отрабатывая в последних умения и навыки проведения тех преобразований, вычислений и рассуждений, которыми должны были обладать учащиеся, но, к сожалению, не обладают, мы всегда можем осуществить дидактические принципы последовательного преодоления трудностей, доступности, полноты, сравнения и т.д.

Ныне действующие программы по математике не предусматривают изучение каких-либо теоретических основ о задачах и их решении. Теоретические знания о задачах и их решении нужны учащимся для того, чтобы они могли производить решение разнообразных задач сознательно и целенаправленно, а не только лишь на основе подражания, по аналогии с ранее решёнными задачами. Конечно, такие аналогии нужны, но если ученик при встрече с незнакомой задачей ограничивается лишь поиском аналогий, то неминуемы ошибки, а в большинстве случаев решение вовсе не будет найдено. Поиск решения незнакомых задач должен вестись школьниками культурно и сознательно, с полным пониманием сущности самой задачи и её решения. Важнейшими элементами любого метода поиска решения являются анализ и синтез. При решении математических задач синтез может использоваться в двух формах рассуждения: 1) когда двигаются от данных к искомым фактам; 2) когда элементы объединяют в одно целое. Точно так же и анализ может выступать в двух формах: 1) когда в рассуждениях двигаются от искомых к данным задачи; 2) когда целое (фигуру, выражение и т.п.) расчленяют на части.

Остановимся ещё на одном моменте, который играет важную роль в процессе поиска решения. Во время раздумья над возможными путями решения задачи учащемуся пришёл в голову некоторый «шажок мысли». Правильным ли он является? Критерием в этом вопросе является прогнозирование, т. е. предвидение результата, получаемого в процессе анализа, синтеза, обобщения. Формирование умения прогнозировать, предвидеть результаты, к которым приведёт каждый отдельный шажок мысли, является важным компонентом развития мышления. С этой целью на уроках математики при обсуждении идеи решения, когда кто-либо из учащихся предлагает воспользоваться той или иной формулой, теоремой, тождественным преобразованием, целесообразно добиваться того, чтобы он обосновывал разумность своего предложения и хотя бы в общих чертах указывал, к чему оно приведёт. Тем самым перед всем классом раскрывается аналитико-синтетический ход рассуждений одного из учащихся, а остальные приучаются прогнозировать процесс поиска решения задачи.

Невозможно сказать, как возникает решение трудной задачи. Вспомним три из «десяти заповедей учителя» Д.Пойа:

6. Старайтесь научить своих учеников догадываться.
7. Старайтесь научить своих учеников доказывать.
10. Пользуйтесь наводящими указаниями, но не старайтесь навязывать своего мнения насильно.

В каждом способе решения задач какого-либо вида, в самом решении этих задач, в умениях, формируемых при этом, содержатся как чисто специфические черты, присущие лишь способу и умениям, соответствующим данному виду задачи, так и некоторые общие черты, присущие методам и умениям по решению любых математических задач. Поэтому при решении задач того или иного вида надо в первую очередь подчёркивать и выделять общие методы решения задач: разбиение на подзадачи, разбиение области задачи на части, сведение данной задачи к ранее решённым, модельные преобразования задачи.

Значит, задача учителя состоит в следующем: сформировать такой общий подход к решению задач, когда задача рассматривается как объект для анализа, для исследования, а её решение – как конструирование и изобретение способа решения. Естественно, что такой подход требует не бездумного решения огромного числа задач, а неторопливого, внимательного и обстоятельного решения значительно меньшего числа задач, но с серьёзным последующим анализом проведённого решения, выявления в нём общих методов и приёмов решения любых математических задач.

Главное при этом – разбудить дремлющие силы самого ученика, вызвать у него ненасыщаемую жажду знаний, желание самосовершенствования.

Задачный подход к обучению имеет свои закономерности, принципы, правила и требования. Они являются ориентиром в моей работе. К ним относятся: полнота, наличие ключевых задач, связность, возрастание трудности в каждом уровне, целевая ориентация, целевая достаточность, гибкость, психологическая комфортность.

1. Полнота. Наличие задач на все изучаемые понятия, факты, способы деятельности, включая мотивационные, подводящие под понятие, на аналогию, следствие из фактов.

2. Наличие ключевых задач. Группировка задач в узлы вокруг объединяющих центров – задач, в которых рассматриваются факты или способы деятельности, применяемые для решения других задач и имеющие принципиальное значение для усвоения предметного содержания.

3. Связность. Вся совокупность задач графически может быть представлена связным графом, в узлах которого – ключевые задачи, выше них – подготовительные и вспомогательные, ниже – следствия, обобщения и так далее.

4. Возрастание трудности на каждом уровне. Система задач состоит из трёх подсистем, соответствующих минимальному, общему и продвинутому уровням планируемых результатов обучения. В каждой из подсистем трудность задач непрерывно нарастает.

5. Целевая ориентация. Для каждой задачи определено её место и назначение в блоке уроков.

6. Целевая достаточность. Достаточно задач для тренажа в классе и дома, аналогичных задач для закрепления методов решения, задач для групповых и индивидуальных заданий разной направленности, задач для самостоятельной (в том числе и исследовательской) деятельности учащихся, задач для текущего итогового контроля с учётом запасных вариантов.

7. Гибкость. Гибкость задачного подхода выражается в обеспечении возможности приспособления содержания обучения и путей его усвоения к индивидуальным потребностям обучаемых. Надо обеспечить индивидуальный темп усвоения, индивидуальную технологию обучения.

8. Психологическая комфортность. Система задач учитывает наличие разных темпераментов, типов мышления, видов памяти. Есть задачи для устных упражнений, письменного выполнения, чтение чертежа, задачи-шутки и другие. Каждое задание, предлагаемое учителем (там, где это возможно), должно иметь словесное, графическое, предметно-иллюстративное решение. Ученик вправе выбрать какое-либо одно и может рассчитывать на успех, что будет усиливать его учебную мотивацию. Это особенно важно в старших классах, где дидактический материал разнообразен по содержанию, форме и объёму.

Рассмотрим всё выше сказанное на примерах.

«Метод интервалов при решении неравенств»

Предлагаю решить неравенство: $(a+2)(a+3)\geq 0$.

Решением его является объединение двух промежутков $(-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$.

Далее предлагаю решить методом интервалов другие неравенства. Но так, чтобы, видоизменяя неравенство можно было увидеть, и как изменяется его решение.

Например:

а) $-\frac{1}{2}(a+2)(a+3) \geq 0$;

б) ($(2a+5)^2(a+2)(a+3) \geq 0$.

Полезно также предложить учащимся неравенства, которые решаются по смыслу:

а) $|(a+2)(a+3)| \geq 0;$

б) $|(a+2)(a+3)| > 0;$

в) $|(a+2)(a+3)| \leq 0$.

Ранее рассмотренные неравенства можно использовать для решения уравнений.

$\frac{|(a+2)(a+3)|}{(a+2)(a+3)} = 1$, очевидно, что при всех значениях a , удовлетворяющих неравенству (a+2)(a+3) >0, уравнение имеет смысл.

Упражнения, которые составляются и решаются по аналогии

Другими словами, мы находим общий способ решения различных по заданию задач.

Например, решаем уравнение с одной переменной $(x^2 – 4x + 3)^2 + (x^2 – 1,5x + 0,5)^2 = 0$.

Равенство верно, если

$x^2 – 4x + 3 = 0$;
$x^2 – 1,5x + 0,5 = 0$. Отсюда, $x = 1$.

Затем можно дать уравнение с двумя переменными, которые решаются аналогично первому:

1) $(x^2 – 4x + 3)^2 + (y^2 – 5y +6)^2 = 0$;
2) $(x^2 - y – 2)^2 + (x + y +2)^2 = 0$.

Если предложить учащимся решить квадратное уравнение с двумя переменными типа

3) $x^2 + y^2 + 6x – 2y + 10 = 0$ после решения квадратных уравнений с одной переменной, то обычно они испытывают трудность в поиске его решения, но если им предложить это уравнение после решения уравнений 1) и 2), то ученики легко находят способ решения, рассуждая по аналогии. Действительно, для этого достаточно привести уравнение (3) к виду: $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 – 2y + 1) = 0$, $(x + 3)^2 + (y – 1)^2 = 0$.

Затем логично взять примеры на доказательство. Доказать, что квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + 9{,}25$ положителен при все значениях x. Учащиеся, по аналогии, выделив полный квадрат, легко приведут трёхчлен к виду $(x - 3)^2 + 0{,}25$ и сделают вывод. Что квадратный трёхчлен положителен при всех x. Затем полезно предложить учащимся многочлен с двумя переменным и доказать, что при всех x и y, он принимает лишь положительные значения: $2x^2 + 5y^2 + 2xy + 1 = (x^2 + 2xy + y^2) + (4y^2 + x^2 + 1) = (x + y)^2 + (4y^2 + x^2 + 1)$.

$(x + y)^2 \geq 0$ и $(4y^2 + x^2 + 1) > 0$ при всех значениях переменных. Следовательно, $2x^2 + 5y^2 + 2xy + 1 > 0$.

Подобный подход к осмыслению материала уроков позволяет найти не только общие методы решения задач, но и способы уплотнения урока.

Задачный подход к обучению можно использовать в каждом классе, каждым учителем. Этот подход позволяет поверить ученику в свои силы, совместная работа учителя и ученика даёт эффект сотрудничества, позволяет видеть своё продвижение по мере нарастания трудности задач. При этом способе работы возможно разноуровневое (дифференцированное) обучение: для сильных учащихся задачи продвинутого уровня, больший объём теоретического материала, работа с дополнительными учебниками, задачниками; для слабых – задачи минимального уровня, больше помощи со стороны учителя.

Здесь, мне кажется, уместным сформулировать один из принципов обучения школьников, который Хазанкин Р.Г. называет принципом «четырёх СО».

Урок математики – это:

- Сотрудничество,
- Сопереживание,
- Сорадование,
- Созидание.